Комолов В.М., канд. физ-мат наук **Латынин Ю.М.**

Украинская инженерно-педагогическая академия, г. Харьков

Суперпозиция скалярных и векторных асинхронных гармонических колебаний

Введение. В физике давно известны фигуры Лиссажу. Они представляют собой прочерчиваемые точкой замкнутые траектории, которая «*одновременно участвует в двух гармонических колебаниях в двух взаимно перпендикулярных направлениях*» [1]. Их можно представить как суперпозицию векторных гармонических колебаний, конец результирующего вектора, которых описывает траекторию (*годограф вектора*) – фигуры Лиссажу. Более сложный вариант возникает при суперпозиции асинхронных скалярных гармонических колебаний: при произвольных соотношениях между амплитудами, частотами и начальными фазами. Применив обобщенную теорему сложения тригонометрических функций [2] к процессу суперпозиции колебаний можно получить новые, аналитические представления для амплитуд, фаз и частот в случае сложения скалярных колебаний (см. часть 2) и изучить «внутреннюю структуру» фигур (кривых) Лиссажу в первом случае (часть 1).

Часть 1. Пусть в плоскости комплексного переменного $z = x+iy$ совершаются одновременно два гармонических колебания в перпендикулярных направлениях:

$$x = A_m \sin(m\omega\cdot t - \varphi_m)\ ; \quad y = A_n \sin(n\omega\cdot t - \varphi_n), \qquad (1)$$

где ω - круговая частота $\omega=2\pi f=2\pi/T$, где T- период «базового» колебания t - время, A_m, A_n – амплитуды колебаний, φ_m, φ_n- начальные фазы, а m, n - целые числа. Представим нижеследующие соотношения в более компактном виде. С этой целью введем обозначение $v = m\cdot\omega\cdot t - \varphi_m; u = n\cdot\omega\cdot t - \varphi_n$ (2)

Тогда результирующее колебание точки в плоскости z имеет вид:

$$z(t) = x + iy = z = A_m \cdot \sin v + iA_n \cdot \sin u \qquad (3)$$

При заданных числовых значениях вышеуказанных параметров в (1) можно построить кривые Лиссажу (так именовать их будем ниже) в декартовой системе координат. Они приведены в известных источниках (см. [1], [3]). Однако изучить их внутреннюю структуру при этом не удается. Поэтому обратимся к их представлению в полярной системе координат. Из (1) и (3):

$$z = x + iy = A_m \sin v + i \cdot A_n \sin u = \sqrt{A_m^{\ 2} \sin^2 v + A_n^{\ 2} \sin^2 u} \cdot e^{i\,arctg\left[\frac{A_n \sin u}{A_m \sin v}\right]} \qquad (4)$$

Преобразуем аргумент z, используя соотношения, полученные в [2]

$$arctg s + arctg\left[(1-s)/(1+s)\right] = \pi/4 . \qquad (5)$$

Тогда $$arctg\left[\frac{A_n \sin u}{A_m \sin v}\right] = \frac{\pi}{4} - arctg\left[\frac{A_m \sin v - A_n \sin u}{A_m \sin v + A_n \sin u}\right] = \frac{\pi}{4} - \varphi(t), \qquad (6)$$

где $$\varphi(t) = arctg\left[\frac{A_m \cdot \sin v - A_n \cdot \sin u}{A_m \cdot \sin v + A_n \cdot \sin u}\right]. \qquad (6')$$

Введем обозначение $r(t) = \sqrt{A_m^{\ 2} \cdot \sin^2 v + A_n^{\ 2} \cdot \sin^2 u}$. (7)

Заметим, что в составляющую величин u и v входит время:

$$\omega \cdot t = 2\pi \cdot f \cdot t = 2\pi \cdot t / T = 2\pi \cdot t' \qquad (8)$$

где $t' = t/T$ безразмерная величина, для «базового» колебания частоты ω (периодом T) $0 \le t' \le 1$.

Преобразуем выражение $\varphi(t)$, используя формулы сложения из [2]:

$$\begin{aligned} A_m \cdot \sin v - A_n \cdot \sin u &= 2\sqrt{A_m \cdot A_n} \cdot Im\left\{e^{i\psi} \cdot sh(p + i\psi)\right\} = \\ &= 2\sqrt{A_m \cdot A_n} \cdot \left|sh(p+i\psi)\right| \cdot \sin\left[\gamma + arctg(cthp \cdot tg\psi)\right]. \end{aligned} \qquad (9)$$

$$\begin{aligned} A_m \cdot \sin v + A_n \cdot \sin u &= 2\sqrt{A_m \cdot A_n} \cdot Im\left(e^{i\gamma} \cdot ch(p + i\psi)\right) = \\ &= 2\sqrt{A_m \cdot A_n} \cdot \left|ch(p+i\psi)\right| \cdot \sin\left[\gamma + arctg(thp \cdot tg\psi)\right]. \end{aligned} \qquad (10)$$

В (9), (10) $p = \ln\sqrt{A_m / A_n};\ \gamma = (v+u)/2;\ \psi = (v-u)/2$. (11)

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= arctg\left[\frac{A_m \sin v - A_n \sin u}{A_m \sin v + A_n \sin u}\right] = arctg\left[\frac{Im(e^{i\gamma} \cdot sh(p+i\psi))}{Im(e^{i\gamma} \cdot ch(p+i\psi))}\right] = \\ &= arctg\left\{\left|th(p+i\psi)\right| \cdot \frac{\sin(\gamma + arctg(cthp \cdot tg\psi))}{\sin(\gamma + arctg(thp \cdot tg\psi))}\right\}. \end{aligned} \qquad (12)$$

Окончательно $$z(t) = x(t) + iy(t) = r(t) \cdot e^{i\left[\frac{\pi}{4} - \varphi(t)\right]},$$

где $r(t)$ определено в (7) а $\varphi(t)$ – в (6'), (12). Представим другой, более краткий вариант вывода (4), (6):

$$x+iy = A_m \sin v + iA_n \sin u = e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot (e^{-i\frac{\pi}{4}} A_m \sin v + e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot A_n \sin u) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \times$$

$$\times \left[(A_m \sin v + A_n \sin u) - i(A_m \sin v - A_n \sin u) \right] = \sqrt{A_m^{\ 2} \sin^2 v + A_n^{\ 2} \sin^2 u} \times$$

$$\times e^{i\left(\frac{\pi}{4} - arctg \frac{A_m \cdot \sin v - A_n \cdot \sin u}{A_m \cdot \sin v + A_n \cdot \sin u}\right)}, \qquad \text{что совпадает с (4) и (6′).}$$

Имеет место еще одно представление, которое отлично от (12). Покажем это.

$$\varphi(t) = arctg\left[\frac{A_m \cdot \sin v - A_n \cdot \sin u}{A_m \cdot \sin v + A_n \cdot \sin u}\right] = arctg \frac{A \cdot \left[\frac{\sin v - \sin u}{\sin v + \sin u}\right] + B}{A + B \cdot \left[\frac{\sin v - \sin u}{\sin v + \sin u}\right]} = \qquad (13)$$

$$= arctg\left[\frac{ctg\gamma \cdot tg\psi + thp}{1 + thp \cdot ctg\gamma \cdot tg\psi}\right], \qquad \text{где}$$

$$A = (A_m + A_n)/2; B = (A_m - A_n)/2; B/A = (A_m - A_n)/(A_m + A_n) = thp \quad (14)$$

Когда $A_m = A_n = A$, т.е. равны, то

$$z(t) = x + iy = A \cdot \sqrt{\sin^2 u + \sin^2 v} \cdot e^{i\left[\frac{\pi}{4} - \varphi(t)\right]}; \; p = ln\sqrt{\frac{A_m}{A_n}} = 0; thp = 0;$$

$$\varphi(t) = arctg\left[ctg\gamma \cdot tg\psi\right] = arctg\left[((v+u)/2) \cdot tg((v-u)/2)\right].$$

В конечном итоге $\qquad r(t') = A \cdot \sqrt{\sin^2 v + \sin^2 u} \qquad (15)$

$$\theta(t') = \arg z(t') = \pi/4 - arctg\left[ctg((v+u)/2) \cdot tg((v-u)/2)\right]. \qquad (16)$$

Если принять начальные фазы φ_m, φ_n равными нулю, то при $m, n > 0$

$$(v+u)/2 = 2\pi \cdot t' \cdot (m+n)/2; \quad (v\text{-}u)/2 = 2\pi \cdot t' \cdot (m-n)/2; \; 0 < t' \le 1. \quad (17)$$

На рис.1 приведена иллюстрация зависимости модуля $z(t')$: $r(t')=r(2\pi t')$ при соотношении частот 2:1; 3:2 и 4:3. На рис.2 дана зависимость аргумента $\theta(t')$ комплексной функции $z(t')$ от времени t' при соотношении частот 5:1. На рис.3 дана последовательность кривых Лиссажу при том же соотношении частот и различных сдвигах фаз исходных гармонических колебаний.

Часть 2. Исследование суперпозиции двух гармонических колебаний включает и изучение частного случая – биений: сложение двух колебаний с близкими

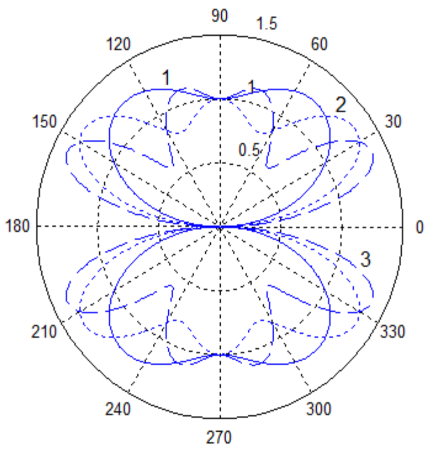

Рис.1.Модуль z (t') как функция 2πt': соотношение частот 1-(2:1); 2-(3:2); 3-(4:3)

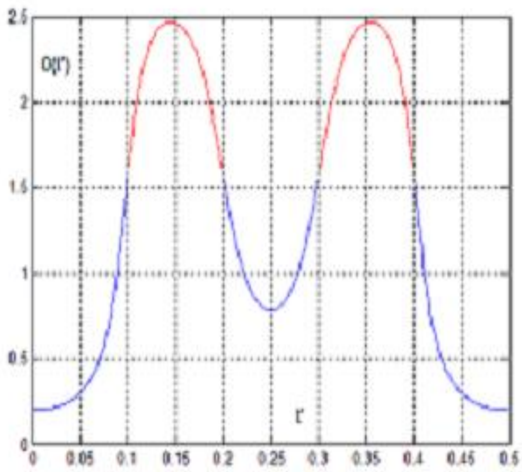

Рис 2. Аргумент Z(t') как функция t', соотношение частот 5:1

частотами и равными амплитудами. Этот случай изучен достаточно подробно. В суммарном сигнале при этом обычно выделяют огибающую и полную фазу. Суперпозиция 2-х гармонических колебаний при произвольном соотношении между их амплитудами, частотами и начальными фазами не исследовалась. Рассмотрим именно этот случай. Пусть задан сигнал $s(t)$, как сумма двух гармоник с частотами ω_1, ω_2: $\quad s(t)=A_1\cdot sin(\omega_1+\varphi_1)+A_2\cdot sin(\omega_2+\varphi_2)$ (18)

Необходимо представить $s(t)$ в форме: $\quad s(t)=A(t)\cdot sin\psi(t),$ (19)

т.е. в виде, где $A(t)$ – огибающая суммарного сигнала и полная фаза ψ являются функциями времени: $\psi=\omega_0\cdot t+\theta(t)+\theta_0$, причем $\theta(t)$ не содержит слагаемого, линейно зависящего от времени. Произведем в (18) ряд преобразований, взяв за основу соотношения, полученные в [2]:

$$s(t)=Im\left\{A_1\cdot e^{i\cdot(\omega_1 t+\varphi_1)}+A_2\cdot e^{i\cdot(\omega_2 t+\varphi_2)}\right\}=$$

$$=Im\left\{2\cdot\sqrt{A_1\cdot A_2}\cdot e^{i\cdot[(\omega_1+\omega_2)\cdot t/2+(\varphi_1+\varphi_2)/2]}\cdot ch\left[ln\sqrt{A_1/A_2}+i\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right]\right\}=$$

$$=\sqrt{A_1^{\,2}+A_2^{\,2}+2A_1\cdot A_2\,cos[(\omega_1-\omega_2)\cdot t+(\varphi_1-\varphi_2)]}\cdot sin\left\{\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}+\right.$$

$$\left.+arctg\left[\frac{A_1-A_2}{A_1+A_2}\cdot tg\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right]\right\}. \qquad (19')$$

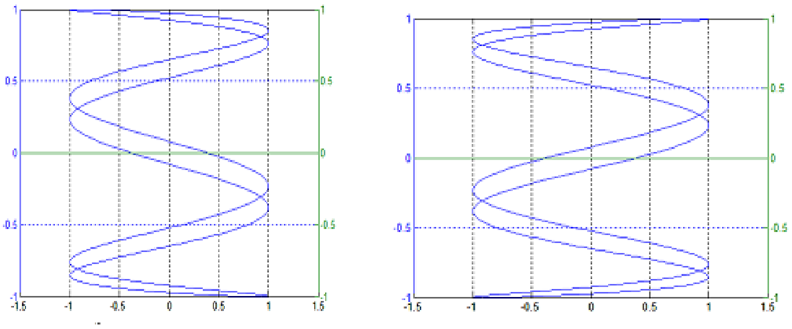

Рис.3. Кривые Лиссажу, частоты 5:1, сдвиг фаз $\pm 45^0$

Огибающая $A(t)$ есть выражение в формуле (19′), стоящее перед функцией синуса, т.е под корнем, а полная фаза $\psi(t)$ суммарного сигнала – выражение аргумента синуса:

$$A(t) = \sqrt{A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2} + 2A_1A_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + (\varphi_1 - \varphi_2)]} \quad ; \qquad (20)$$

$$\psi(t) = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + arctg\left[\frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} tg(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2})\right]. \qquad (21)$$

Далее, без уменьшения общности, начальные фазы полагаем равными нулю, т.е. $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Величина $A(t)$ может быть представлена и в другой форме:

$$A(t) = \sqrt{(A_1 + A_2)^2 \cdot cos^2 \frac{\Delta\omega}{2}t + (A_1 - A_2)^2 \cdot sin^2 \frac{\Delta\omega}{2}t} = 2\sqrt{A_1A_2} \cdot \left|ch(p + i\frac{\Delta\omega}{2}t)\right|, \quad (22)$$

где $p = ln\sqrt{A_1 / A_2}$, а $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$. (23)

С учетом (23) $\psi(t) = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + arctg\left[thp \cdot tg(\dfrac{\Delta\omega}{2}t)\right]$. (24)

Период T огибающей $A(t)$ суммарного сигнала равен:

$$T = 2\pi/(\omega_1 - \omega_2). \qquad (25)$$

Огибающая $A(t)$ принимает минимальное значение $A_{min} = A_1 - A_2$ при $t = t_k$,

где $t_k = \pi \cdot (1+2k)/(\omega_1 - \omega_2)$, k= 0,1,2,3… (26)

и максимальное значение $A_{max} = A_1 + A_2$ при $t = t_k$

$$t_k = 2k \cdot \pi/(\omega_1 - \omega_2), \qquad k = 0,1,2,3\ldots \qquad (27)$$

Мгновенную частоту $\omega(t)$ сигнала $s(t)$ определяют из соотношения $\omega(t) = d\psi(t)/dt$. Привлекая (24), после ряда преобразований получим выражение для мгновенной частоты $\omega(t)$:

$$\omega(t) = (\omega_1 + \omega_2)/2 + F \cdot (\omega_1 - \omega_2)/2 = \omega_1(1+F)/2 + \omega_2(1-F)/2, \qquad (28)$$

где $F = \dfrac{A_1^2 - A_2^2}{A^2(t)} = \dfrac{\eta^2 - 1}{(\eta+1)^2 \cdot cos^2(\Delta\omega \cdot t/2) + (\eta-1)^2 \cdot sin^2(\Delta\omega \cdot t/2)}$, (29)

а $\eta = A_1/A_2$. (30)

Раскроем сомножители ($1 \pm F$) в (28):

$$1 + F = 2 \cdot \frac{\eta(\eta + cos(\Delta\omega \cdot t))}{1 + \eta^2 + 2\eta \cdot cos(\Delta\omega \cdot t)} \quad \text{и} \quad 1 - F = 2 \cdot \frac{1 + \eta \cdot cos(\Delta\omega \cdot t)}{1 + \eta^2 + 2\eta \cdot cos(\Delta\omega \cdot t)}$$

и получим выражение для мгновенной частоты $\omega(t)$, которое совпадает с тем, что приведено в [4]. С учетом (22) получим другое представление параметра F:

$$F = \frac{1}{2} \cdot \frac{sh(2p)}{\left|ch(p + i \cdot \Delta\omega \cdot t/2)\right|^2} \tag{31}$$

Проведенный анализ (28),(29) позволяет получить значения мгновенной частоты $\omega(t)$ в точках достижения максимума и минимума огибающей $A(t)$. В точке максимума (27) огибающей $A(t)$:

$$\omega(t) = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot \frac{\eta + 1}{\eta - 1}, \qquad 0 < \eta < \infty \tag{32}$$

В точке минимума (26) огибающей $A(t)$ мгновенная частота:

$$\omega(t) = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot \frac{\eta - 1}{\eta + 1}, \qquad 0 < \eta < \infty \tag{33}$$

Из (32),(33) следует, что для установления характера частотного заполнения сигнала $s(t)$ можно использовать параметр

$$V = A_1 \cdot \omega_1 / (A_2 \cdot \omega_2) = \eta \cdot \omega_1 / \omega_2 \tag{34}$$

При этом полагаем во всех случаях $\eta > 1$! Тогда возможны три случая. Мгновенная частота при: **1.-** $V>1$ на периоде огибающей всегда положительна, т.е. $\omega(t)>0$; **2.**- $V=1$ в точке минимума огибающей равна 0; **3.**- $V<1$ в минимуме огибающей отрицательна $\omega(t)<0$. Рис.4 иллюстрирует поведение полной фазы $\psi(t)=\theta(t)$ суммарного сигнала от t при различных значениях параметра p: переменная изменяется в пределах периода огибающей T ($-T/2 \le t \le T/2$). На рис. 5,6 даны зависимости мгновенной частоты $\omega(t)$ суммарного сигнала при различных значениях параметра V в точках минимума и максимума огибающей.

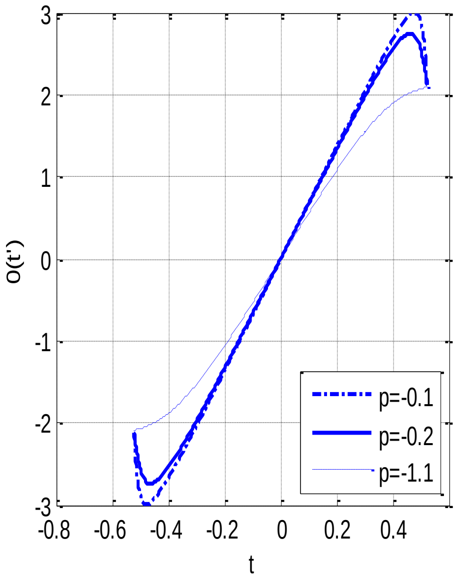

Рис. 4

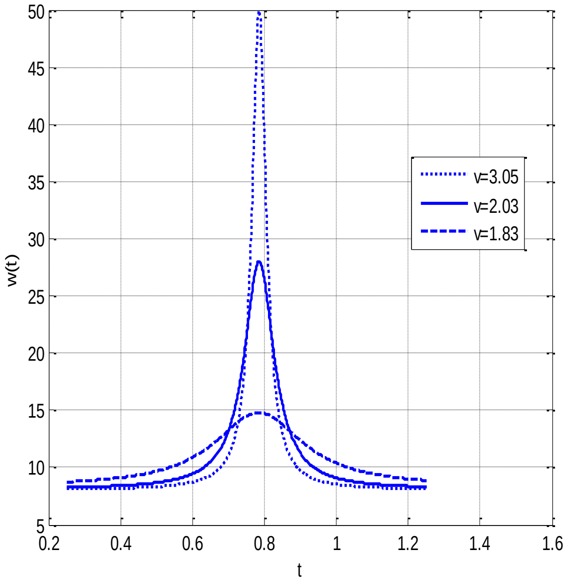

Рис. 5

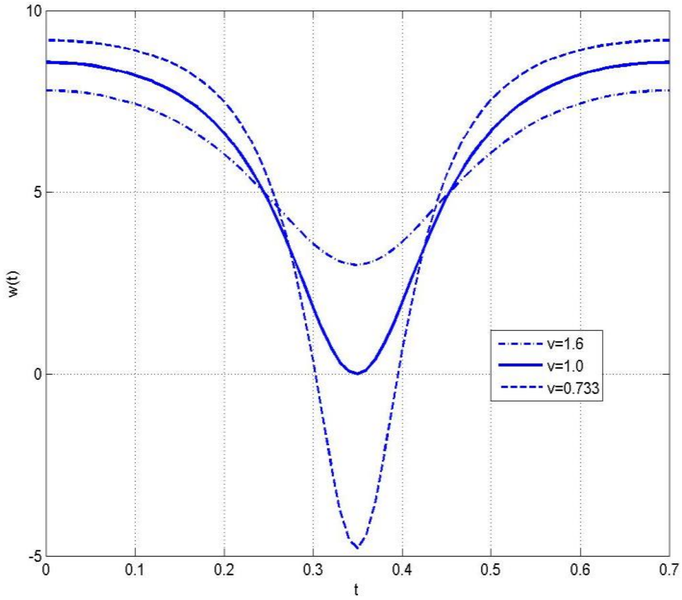

Рис. 6

Выводы: На основе теорем сложения [2] получены аналитические соотношения, которые позволяют изучать суперпозицию скалярных и векторных гармонических колебаний в наиболее общем случае.

Литература:

1. БЭС. Физика. Под ред.Прохорова А.М. 4-е изд. Больш. Рос. энц., М., 1999.

2. Комолов В.М.Обобщение теорем сложения для тригонометрических функций. Mater. of the X Intern. Scien. and pract. conf. «Modern European scien.»-2014,v.15,Mathematics.Physics,Sheffield, Scien. and Educat.LTD, p.38-42

3. Горелик Г.С Колебания и волны. Гос. изд-во физ-мат лит-ры., М., 1959.

4. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.:, Сов. Радио,1971