К.ф.-м.н. Постников Б.М.

Северный государственный медицинский университет, Россия

Уточнение уравнения связи между внутренним радиусом кровеносного сосуда и давлением крови в нём

В данной статье уточняются некоторые результаты и выводы, изложенные в [1].

1. О модуле упругости Юнга и необходимости уточнения полученного ранее уравнения

Рассмотрим следующие характеристики кровеносного сосуда:

r — внутренний радиус сосуда,

h — толщина стенки сосуда,

σ — механическое напряжение в стенке сосуда, т.е. отношение силы растяжения сосуда к площади его продольного сечения,

p — давление крови в сосуде.

Под величиной p мы подразумеваем, как это обычно принято, избыточное давление, т.е. разность между истинным давлением крови и атмосферным давлением. Именно эта разность p «расширяет» кровеносный сосуд, давая крови возможность протекать по нему.

Мы предполагаем, что при растяжении кровеносного сосуда плотность его стенки не изменяется, а, значит, не изменяется и её объём. Будем ещё предполагать, что происходит растяжение сосуда только по ширине, т.е. при увеличении радиуса сосуда его длина не изменяется.

При перечисленных выше предположениях в [1] было получено следующее уравнение связи между давлением крови p и радиусом сосуда r:

$$p(r) = b \cdot E \cdot \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \cdot r^{-2}, \tag{1}$$

где E, r_0 и b — положительные константы, причём E — модуль упругости Юнга, r_0 — радиус кровеносного сосуда при $p = 0$ (т.е. при равенстве истинного давления крови и атмосферного давления), $b = rh$.

Уравнение (1) было получено двумя способами. В частности, оно получается как решение следующего дифференциального уравнения для функции $p(r)$:

$$dp = \left(\frac{E\cdot b}{r^3} - \frac{2p}{r}\right) dr\ . \qquad (2)$$

Дифференциальное уравнение (2) выведено в [2] (см. формулу (10.20) на стр. 195).

Недавно я случайно обнаружил несоответствие уравнения (1) определению модуля упругости Юнга. Как известно, он численно равен механическому напряжению, возникающему в растягиваемом образце при увеличении его исходной длины в 2 раза (т.е. при его относительной деформации $\varepsilon = 1$). Применительно к случаю растяжения сосуда только по ширине это означает, что должно выполняться равенство

$$\sigma(2r_0) = E. \qquad (3)$$

Из равенства $\sigma = \frac{p\cdot r^2}{b}$ (см. формулу (10.14) на стр. 195 в [2]) и уравнения (1) получаем:

$$\sigma(r) = E \cdot \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\ .$$

Поэтому

$$\sigma(2r_0) = E \cdot ln\left(\frac{2r_0}{r_0}\right) = E \cdot ln\, 2 \neq E,$$

что противоречит равенству (3). Поэтому уравнение (1) и дифференциальное уравнение (2) нуждаются в уточнении.

2. Другое уравнение связи между $\boldsymbol{p}$ *и* $\boldsymbol{r}$

После тщательной проверки выяснилось, что отмеченное выше несоответствие уравнения (1) определению модуля упругости Юнга обусловлено специальным выражением дифференциала относительной деформации сосуда, принятом в [2] (см. формулу (10.17) на стр.195): $d\varepsilon = \frac{dr}{r}$.

Именно это выражение $d\varepsilon = \frac{dr}{r}$ используется в [2] при выводе дифференциального уравнения (10.20) (см. выше дифференциальное уравнение (2)). Это же выражение $d\varepsilon = \frac{dr}{r}$ было использовано мною в [1] при выводе уравнения (1). Я опрометчиво принял его за истинное значение дифференциала относительной деформации сосуда.

Очевидно, что при растяжении сосуда только по ширине его относительная деформация $\varepsilon(r) = \frac{r-r_0}{r_0}$. Тогда истинное выражение для дифференциала относительной деформации следующее:

$$d\varepsilon = \frac{dr}{r_0}.$$

По закону Гука напряжение $\sigma = E \cdot \varepsilon$, поэтому $\sigma(r) = E \cdot \frac{r-r_0}{r_0}$. Тогда, учитывая выражение $\sigma = \frac{p \cdot r^2}{b}$ (см. выше), мы получаем, что

$$p = \frac{b \cdot \sigma}{r^2} = \frac{b \cdot E}{r^2} \cdot \frac{r-r_0}{r_0} = \frac{b \cdot E}{r_0} \cdot \frac{1}{r} - b \cdot E \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Итак, вместо уравнения (1) получаем другое уравнение связи между давлением крови p и радиусом сосуда r:

$$p(r) = \frac{b \cdot E}{r_0} \cdot r^{-1} - b \cdot E \cdot r^{-2}. \qquad (4)$$

Подставляя $r = 2r_0$ в полученное выше выражение $\sigma(r) = E \cdot \frac{r-r_0}{r_0}$, мы получаем $\sigma(2r_0) = E \cdot \frac{2r_0-r_0}{r_0} = E$, т.е. выполняется обусловленное определением модуля упругости Юнга равенство (3).

Исследуя заданную формулой (4) функцию $p(r)$ с помощью её производной, мы найдём её точку максимума $r_1 = 2r_0$, причём $p_{max} = p(r_1) = \frac{b \cdot E}{4 \cdot r_0^2}$ – наибольшее значение функции $p(r)$. Заметим, что при $r \to +\infty$ функция $p(r) \to 0$ по порядку как r^{-1}. Легко убедиться, что качественное поведение и график этой функции $p(r)$ будут такими же, как для функции определённой равенством (1) (см. рис. 2 на стр. 75 в [1]). Поэтому интерпретация и возможные применения для полученного выше уравнения (4) являются принципиально такими же, как и для уравнения (1) (см. пункт 4 в [1], стр. 77-78). Необходимо только заменить выражение $p_{max} = \frac{s \cdot E}{4\pi \cdot e \cdot r_0^2}$ выражением $p_{max} = \frac{s \cdot E}{8\pi \cdot r_0^2}$ ($s = 2\pi r h -$ площадь поперечного сечения стенки кровеносного сосуда). Напомню, что в [1] мною было высказано предположение (с определённой мотивировкой) о том, что чем меньше для сосуда величина p_{max}, тем вероятнее возникновение его патологии. Если это предположение верно, то из выражения $p_{max} = \frac{s \cdot E}{8\pi \cdot r_0^2}$ следует, что чем у сосуда меньше площадь s поперечного сечения его стенки и модуль упругости E и чем больше радиус r_0, тем вероятнее возникновение его патологии.

3. *Уточнение некоторых равенств и уравнений в [2]*

Для выполнения равенства (3), обусловленного определением модуля упругости Юнга, следует внести следующие уточнения (замены) равенств и уравнений, приведённых в [2] на с. 195:

1) (10.17) заменить равенством $d\varepsilon = \frac{dr}{r_0}$.

2) (10.18) заменить равенством $d\sigma = \frac{E dr}{r_0}$.

3) (10.19) заменить уравнением $E\frac{dr}{r_0} = \frac{r^2}{b} dp + \frac{2pr}{b} dr$.

4) (10.20) заменить уравнением $dp = \left(\frac{E \cdot b}{r_0 r^2} - \frac{2p}{r}\right) dr$.

4. *О механическом напряжении в стенках капилляров*

В [2] на основании равенства $\sigma = \frac{p \cdot r}{h} = \frac{p \cdot r^2}{b}$ (см. формулу (10.14) на стр. 195) сделан следующий вывод: «В капиллярах ($r \to 0$) напряжение отсутствует ($\sigma \to 0$)». Очевидно, под этой фразой автор имел в виду то, что в капиллярах механическое напряжение σ очень мало, т.к. их радиус r очень мал.

Но это явно не соответствует действительности. Из равенства $\sigma = \frac{p \cdot r}{h}$ следует, что при заданном давлении p напряжение σ в стенке любого сосуда определяется не его радиусом r, а отношением $\frac{r}{h}$. У капилляров же мал не только радиус r, но и толщина стенки h. Для капилляров в среднем отношение $\frac{r}{h} \approx 4$ (поэтому $\sigma \approx 4p$), а давление $p \approx 20$ мм рт. ст.

Из выражения $\sigma(r) = E \cdot \frac{r-r_0}{r_0}$ (см. пункт 2) следует, что механическое напряжение в стенке любого кровеносного сосуда (и капилляра, в частности) прямо пропорционально его относительной деформации $\frac{r-r_0}{r_0}$ с коэффициентом пропорциональности E - модулем упругости Юнга этого сосуда. Для капилляров $E \approx 3 \cdot 10^5$ н $\cdot$ м$^{-2}$.

Литература:

1. Постников Б.М. Уравнение связи между внутренним радиусом кровеносного сосуда и давлением крови // Материалы X международной научно-практической конференции «Образование и наука 21 века». Том 11. Математика. Физика. Современные информационные технологии: София (Болгария). «Бял ГРАД-БГ» ООД, 2014. - с.73 – 78.

2. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика.- М.: ГЭОТАР - Медиа, 2012. - 648 с.