Доктор PhD Ильясов Б.Р., Әбдіжәми Ғ.Ә.

Ш.Уалиханов атындағы Көкшетау Мемлекеттік университеті, Қазақстан

Сандық интегралдау

Көбінесе физика есептерінде нақты интегралды табу қажет. Егер интегралдың «туындыға қарсы» мәнін табу мүмкін болмаса, мәселені шешудің жалғыз әдісі сандық әдістер болуы мүмкін. Біздің нұсқада бір өлшемді интегралдарды сандық бағалаудың бірнеше қарапайым әдістері ұсынылады, олар трапеция ережесін, Симпсон ережесін және Гаусс квадратурасын қамтиды.

Тіктөртбұрыш және трапеция ережелері

$\int_a^b f(x)dx$ анықталған интегралды қарастырайық. Интеграл астындағы ауданға тең $f(x)$ a-дан b-ге дейінгі қисық сызық. Біздің міндетіміз - осы қисық астындағы ауданды табу. Қарапайым әдіс - қисық астындағы жалпы ауданды кішкентай тіктөртбұрыштарға бөлу және әр кішкентай төртбұрыштың аудандарын қосу. Әр тіктөртбұрыштың негізі x осінде, ал биіктігі $f(x)$ мәні болсын. Біз x осін h ұзындықтағы кіші сегменттерге бөлеміз. Содан кейін тіктөртбұрыштардың аудандарының қосындысы келтірілген

$$\int_a^b f(x) \approx hf(a) + hf(a+h) + hf(a+2h) + \cdots + hf(b-h)$$

$$\approx h(f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(b-h))$$

Ол қаншалықты аз болса, жақындасу соғұрлым жақсы болады. Біз бұл өрнекті жинақтау арқылы жаза аламыз:

$$\int_a^b \approx \sum_{n=0}^{N-1} h\, f(a+nh) \qquad (1)$$

мұндағы n - бүтін сан және $h = (b-a)\backslash N$. N неғұрлым үлкен болса, қосынды дәлірек болады.

Тіктөртбұрыштардың орнына трапецияны қолдану арқылы біршама жақсартуға болады. Трапецияның негізі h, сол жақ биіктігі $f(a)$ және $f(a+h)$ оң жақ биіктігі бар аудандар $h = (f(a) + f(a+h))\backslash 2$. Төртбұрыштардың орнына трапецияны қолдану нәтиже береді

$$\int_a^b f(x)dx \ \approx h\frac{f(a)+f(a+h)}{2} + h\frac{f(a+h)+f(a+2h)}{2} + \cdots$$

$$\approx h\left(\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(a+(N-1)h) + \frac{f(b)}{2}\right)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h(\frac{f(a)}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} h\, f(a+nh) + \frac{f(b)}{2}$$

мұндағы n - бүтін сан және $h = (b-a)\backslash h$. Бұрынғыдай жақындау жақсарады $N \to \infty$. $F(x)$ түзу болса, бұл өрнектің дәл болатындығын ескеріңіз.

Симпсонның ережесі

Трапеция ережесінде әр аралық үшін $f(x)$екі мәні пайдаланылды және егер $f(x)$ түзу болса. Біршама аралықты және $f(x)$үш мәнін қолдана отырып біршама жақсартуға болады. $x-h$, x және $x+h$ кезінде бағаланатын функцияның мәндерін қолдана отырып, парабола астындағы аудан үшін келесі формуланы аламыз:

$$AREA = h\left(\frac{f(x-h)}{3} + \frac{4f(x)}{3} + \frac{f(x+h)}{3}\right) \quad (2)$$

Біз трапециямен шығарған параболаның тәсілімен бірдей тәсіл жасай аламыз. Біз a -дан b-ге дейінгі аралықты N тең сегменттерге бөліңіз. Сегменттердің әрбір үш еселігі үшін біз жоғарыда көрсетілген парабола формуласын қолдана аламыз. Барлық сегменттердің сомасы:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\left(\frac{f(a)}{3} + \frac{4f(a+h)}{3} + \frac{f(a+2h)}{3}\right) + \left(\frac{f(a+2h)}{3} + \frac{4f(a+3h)}{3} + \frac{f(a+4h)}{3}\right) + \left(\frac{f(a+4h)}{3} + \frac{4f(a+5h)}{3} + \frac{f(a+6h)}{3} + \cdots\right)\right)$$

Назар аударыңыз, h-тің екі еселік қосындысы екі есеге есептеледі, нәтижесінде h көбейгенде 2\3 коэффициент пайда болады:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{f(a)}{3} + \frac{4f(a+h)}{3} + \frac{2f(a+2h)}{3} + \frac{4f(a+3h)}{3} + \frac{2f(a+4h)}{3} + \frac{4f(4+5h)}{3} + \cdots + \frac{4f(a+(N-1)h)}{3} + \frac{f(b)}{3}\right)$$

мұндағы$h = (b - a)\backslash N$ және N жұп сан болуы керек. N функциясы тақ санмен бағаланатындай болуы керек. Бұл біркелкі орналасқан сегменттер үштігі a және b аралығына сәйкес келетіндігін қамтамасыз ету үшін.

Сандық интеграцияның параболалық формуласы Симпсонның ережесі деп аталады. Егер дәл $f(x)$ парабола болса.

Гаусс квадратурасы

Тіктөртбұрыш, трапеция және Симпсон ережелері бірдей жалпы пішінге ие. Анықталған интегралға жақындау әр түрлі нүктелерде өлшенген $f(x)$ шамаларының қосындысына тең:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{N} w_i f(x_i) \quad (3)$$

мұндағы w_i - x_i нүктелерінің салмағы. Тіктөртбұрыш, трапеция және Симпсон ережелерінде x_iбірдей аралықта орналасқан: $x_i = a + ih$. Тіктөртбұрыш ережесі үшін w_i : (1, 1, 1, · · ·, 1, 0). Трапеция ережесі үшін wi: (1/2, 1, 1, 1, · · ·, 1, 1/2). Симпсонның ережелері бойынша wi: (1/3, 4/3, 2/3, 4/3, · ·, 2/3, 4/3, 1/3).

Гаусс x_i жәнеw_i таңдау әдісін анықтады, сондықтан оң жақта қосындысы белгілі интегралға жақындау болады. Оның әдісін қолдана отырып, сол жақтағы қосынды $f(x)$ көп нүктеге $2N + 1$-ге дейін дәл болады. Нүктелер мен салмақтарды кестеден табуға болады. Біз төменде $a = -1, b = 1$және $N = 5$ (Гаусс-Легенде квадраты) мәндерін келтіреміз:

x_i	w_i
+.90618	.23693
+.53847	.47863
0	.56889
-.53847	.47863
-.90618	.23693

Әдетте біреуі Гаусстың нүктелері мен салмақтарын кітаптардан қол жетімді кестелерден іздейді. Гаусс квадратурасының түсіндірмелері мен дәлелдері қызығушылық танытқан оқушы үшін әдебиетте де кездеседі. Бұл курста бізде Гаусс квадратурасының формулаларын алуға уақыт болмайды.