Комолов В.М., канд. физ.-мат. наук **Латынин Ю.М**.

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», Украинская инженерно-педагогическая академия

ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА И ПОЛНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

Введение. Полные эллиптические интегралы давно известны в математике. Известно их разложение в виде степенного ряда по переменной k^2 [1]. Ниже рассмотрены полные эллиптические интегралы в нормальной форме Лежандра I и II-рода $K(k)= F(\pi/2,k)$, $E(k)=E(\pi/2,k)$:

$$K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}d\psi; \tag{1}$$

$$E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\cdot d\psi; \tag{2}$$

где $0<k<1$ – модуль интегралов, а также аналогичные функции [1]:

$$D(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}d\psi; \tag{3'}$$

$$B(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}d\psi\ ; \tag{3''}$$

$$C(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\psi\cdot\cos^2\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}d\psi, \tag{4}$$

с целью выразить (2)÷(4) на основе единой методики, посредством $K(k)$ и нововведенной функции $R(k)$:

$$R(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(2\psi)}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}d\psi. \tag{5}$$

Такой подход приводит к одинаковым разложениям (1)÷(4) в ряд по возрастающим степеням переменной *t:*

$$t = \frac{1-\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}}. \tag{6}$$

При $0<k<1$ величина $1>t>0$. В дальнейшем для краткости входящий в соотношения (1)-(*4)* корень квадратный от выражения, стоящего под знаком интеграла, обозначим как $\Delta(\psi,k)$:

$$\Delta(\psi,k) = \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\ . \tag{7}$$

Основная часть. 1. Произведем в (1)÷(4) единообразные преобразования:

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1-k^2\sin^2\psi}{\Delta(\psi,k)} d\psi = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\Delta(\psi,k)} - \frac{k^2}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\Delta(\psi,k)} +$$
$$+ \frac{k^2}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2\psi)\cdot d\psi}{\Delta(\psi,k)} = (1-\frac{k^2}{2})\cdot K(k) + \frac{k^2}{2}R(k), \tag{8}$$

и аналогичные в (3′) и (3″):

$$D(k) = \frac{1}{2}K(k) - \frac{1}{2}R(k); \tag{9}$$

$$B(k) = \frac{1}{2}K(k) + \frac{1}{2}R(k). \tag{10}$$

Преобразуем теперь функцию $\Delta(\psi,k)$, которая является составной частью подинтегральных выражений в (1)÷(4):

$$\Delta(\psi,k) = \sqrt{k^2[\frac{1}{k^2} - (1-\cos(2\psi))/2]} = k\sqrt{\frac{2-k^2}{k^2} + \cos(2\psi)} =$$
$$= \frac{k}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{ch(2u)+\cos(2\psi)} = \frac{k}{2}\sqrt{e^{2u}+e^{-2u}+2\cos(2\psi)}, \tag{11}$$

где
$$2u = \ln\frac{1+\sqrt{1-k^2}}{1-\sqrt{1-k^2}} = -\ln t\ . \tag{12}$$

В конечном итоге:

$$\Delta(\psi,k) = \frac{k}{2\sqrt{t}}\cdot\sqrt{1+t^2+2t\cdot\cos(2\psi)}, \tag{13}$$

где t определено соотношением (6). Теперь в состав ядра интегралов входит функция $[\sqrt{1+t^2+2t\cdot cos(2\psi)}]^{-1}$. Она является производящей функцией для полиномов Лежандра $P_n(x)$ [2]:

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2+2t\cdot cos(2\psi)}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(cos\,2\psi)\cdot(-t)^n\,. \tag{14}$$

Поэтому (1)-(4) преобразуются:

$$\frac{2\sqrt{t}}{k}\int_0^{\pi/2}\frac{d\psi}{\sqrt{1+t^2+2t\,cos(2\psi)}}=\frac{2\sqrt{t}}{k}\sum_{n=0}^{\infty}[\int_0^{\pi/2}P_n(cos\,2\psi)d\psi](-t)^n\ ; \tag{15}$$

$$\frac{2\sqrt{t}}{k}\int_0^{\pi/2}\frac{cos(2\psi)d\psi}{\sqrt{1+t^2+2t\cdot cos(2\psi)}}=\frac{2\sqrt{t}}{k}\sum_{n=0}^{\infty}[\int_0^{\pi/2}cos(2\psi)\cdot P_n(cos\,2\psi)d\psi](-t)^n\cdot \tag{16}$$

2. Проанализируем интеграл, входящий в (15). При четном n

$$\int_0^{\pi/2}P_{2n}\cdot cos(2\psi)d\psi=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}P_{2n}\cdot cos(s)ds.$$

Здесь произведена замена $2\psi=s$, $d\psi=1/2\cdot ds$; $\psi=\pi/2\rightarrow s=\pi$. (17)

Как показано в [2], четные полиномы Лежандра имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}P_{2n}(cos\,\theta)&=2\frac{(4n-1)!!}{(4n)!!}cos(2n\theta)+2\frac{(4n-3)!!}{(4n-2)!!}\cdot\frac{1}{2}cos(2n-2)\theta+\\&+2\frac{(4n-5)!!}{(4n-4)!!}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot cos(2n-4)\theta+...\frac{(4n-2n-1)!!}{(4n-2n)!!}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\end{aligned} \tag{18}$$

Символом $m!!$ обозначено произведение всех целых чисел, не превосходящих m и имеющих ту же четность, что и m. Вклад в интеграл (15) от всех слагаемых (18) равен нулю, за исключением свободного члена, т.е. последнего члена в (18) без сомножителя $cos\theta$.

$$\frac{1}{2}\int_0^{\infty}P_{2n}\cdot cos(s)\cdot ds=\frac{\pi}{2}d_n\ , \tag{19}$$

где

$$d_n=\frac{(4n-2n-1)!!}{(4n-2n)!!}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\ . \tag{20}$$

Преобразуем (20):

$$d_n = \frac{[2n(2-1)]!!}{[2n(2\text{-}1)]!!} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = [\frac{(2n\text{-}1)}{n! \cdot 2^n}]^2 \quad . \qquad (21)$$

В случае нечетного многочлена Лежандра в (15):

$$\int_0^{\pi/2} P_{2n+1}(\cos 2\psi) \cdot d\psi = 0 \quad . \qquad (22)$$

В конечном итоге полный эллиптический интеграл $K(k)$ имеет следующее представление:

$$K(k) = \frac{\sqrt{t}}{k} \pi \cdot \{1 + \sum_{n=1}^{\infty} [\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}]^2 \cdot t^{2n}\} \qquad (23)$$

Разложение $K(k)$ в ряд (23) совпадает с тем, что представлено в [3].

3. Анализ интеграла под знаком суммы в (16) показывает, что при n-нечетном вклад всех слагаемых равен нулю, за исключением последнего. Поэтому:

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2\psi) \cdot P_{2n+1}(\cos 2\psi) d\psi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos(s) \cdot P_{2n+1} \cdot (\cos s) \cdot ds = \frac{\pi}{2} q_n, \quad (24)$$

где

$$q_n = 2 \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{(2n+1)!!}{[2(n+1)]!!} \cdot \qquad n = 1,2,3\ldots. \qquad (25)$$

В случае четного многочлена Лежандра в (16):

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2\psi) \cdot P_{2n}(\cos 2\psi)\, d\psi = 0 \qquad (26)$$

Функция $R(k)$ может быть представлена следующим рядом:

$$R(k) = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sqrt{t}}{k} \cdot \{t + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [\frac{(2n\text{-}1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{(2n+1)!!}{[2(n+1)]!!}] \cdot t^{(2n+1)}\} \, . \qquad (27)$$

В развернутом виде:

$$K(k) = \pi \frac{\sqrt{t}}{k} [1 + (\frac{1}{2})^2 \cdot t^2 + (\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4})^2 \cdot t^4 + (\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6})^2 \cdot t^6 + \ldots \quad ; \qquad (28)$$

$$R(k) = -\frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{t}}{k}[t + 2(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4})\cdot t^3 + 2(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4})(\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6})\cdot t^5 + ... \quad . \qquad (29)$$

Так как $R(k)<0$, то соотношения (8)-(10) следует уточнить:

$$E(k) = K(k) - k^2[K(k) + |R(k)|]/2; \qquad (30)$$

$$D(k) = [K(k) + |R(k)|]/2; \qquad (31)$$

$$B(k) = [K(k) - |R(k)|]/2. \qquad (32)$$

Как указано в [1] функция $C(k)$ отвечает ряду условий:

$$C(k) = [D(k) - B(k)]/k^2, \quad C(k) = [2\cdot D(k) - K(k)]/k^2. \qquad (33)$$

Принимая во внимание (31), (32) можно установить, что

$$C(k) = |R(k)|/k^2. \qquad (34)$$

Заключение. 1. Получено разложение полных эллиптических интегралов I и II-рода по возрастающим степеням переменного t. Поскольку $t^2<k^2$, то представленные в работе ряды сходятся быстрее, чем приведенные в [3] по степени k;

2. Однозначная, простая связь $C(k)$ с модулем введенной функции $|R(k)|$ и k^2 позволяет представить функции $D(k)$, $B(k)$, $C(k)$ подобными рядами, что и полные эллиптические интегралы в п.**1**;

3. Реализованный и представленный в работе алгоритм может быть использован и в других случаях, в частности, для эллиптического интеграла 3-го рода.

Список литературы

1. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1979.-344 с.

2. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1975.-328 с.

3. Двайт Г.Б.Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1973.-228 с.