Педагогика

Касимова Н.А., Агылуков А., Рахашев Б.К.

Шымкент университеті, Казахстан

Математикалық және физикалық есептер шығаруда векторлардың қолданылуы

Мектеп курсы геометриясында бір вектордың екінші бір векторға тәуелділігі, немесе бір вектордың басқа бірнеше вектор бойынша жіктелуі арқылы берілуі көп қарастырылады.

Соңғы жылдары орта мектептің математика пәнінің бағдарламасына векторлар және оларды қолданып геометриялық есептерді шығару тақырыптары енгізілген. Бірақ, векторлар теориясын үйренгенмен, оларды геометриялық есептерді шығаруда белгілі қиыншылықтар туғызады. Ол қиыншылықтарды математика пәнінің мұғалімі өздігінен оңай шеше алмайды. Сондықтан, векторларды стереометриялық есептерді шешуде қолдану тақырыбы, орта мектеп математикасының өзекті мәселелерінің бірі болып табылады.

Векторларды қолданып есептерді шешуге қажетті негізгі формулалар мен арақатынастар тізімін дәлелдеусіз келтірейік:

1. Кез келген үш нүкте *A, B* және *C* үшін $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$; $\vec{AB}=\vec{CB}-\vec{CA}$

2. Егер $\vec{AC}=k\vec{CB}$ болса, онда $\vec{OC}=\dfrac{\vec{OA}+k\vec{OB}}{1+k}$

3. Кез келген бір түзудің бойында жатпайтын үш нүкте А, В және С үшін

$\vec{OC}=h\vec{OA}+(1-k)\vec{OB}$, $A\neq B$ шарты орындалуы қажетті және жеткілікті

4. Егер М АВ кесіндісінің ортасы болса $\vec{OA}-\vec{AM}=\vec{MB}$, онда $\vec{OM}=\dfrac{1}{2}\left(\vec{OA}+\vec{OB}\right)$.

5. Егер *АВСД* параллелограммы берілсе, онда $\vec{OA}+\vec{OC}=\vec{OB}+\vec{OD}$.

6. Егер *М* мен *N* АВ және СД кесінділерінің ортасы болса, онда

$$\vec{MN}=\frac{1}{2}\left(\vec{AC}+\vec{BD}\right),\ \vec{MN}=\frac{1}{2}\left(\vec{AD}+\vec{BC}\right).$$

7. ΔABC-ның центроиді G нүктесі үшін $\vec{OG}=\frac{1}{3}\left(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}\right),\ \vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{O}$

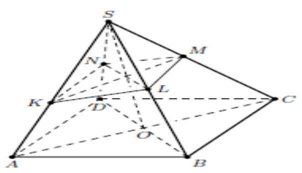
8. $ABCD$ тетраэдрінің центроиді G нүктесі үшін

$$\vec{OG}=\frac{1}{4}\left(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}\right),\ \vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}+\vec{GD}=\vec{O}$$

9. Төртеуі бір жазықтықта жататын *A, B, C, Д* нүктелерінің үшеуі *A, B, C* бір түзуде жатпаса $\vec{AD}=\alpha\vec{AB}+\beta\vec{AC}$ (*) $\vec{OD}=(1-\alpha-\beta)\vec{OA}+\alpha\vec{OB}+\beta\vec{OC}$ (**)

Бұл формулалар мен ара қатыстар орта мектептің бағдарламасында толық берілмейді. Бірақ математика пәнінің мұғалімдері білуі қажет деп санаймыз. Енді векторларды қолданып шығаруға мысалдар келтіреміз.

Мысалы: $SABCD$ пирамидасының табаны параллелограмм . SA, SB, SC, SD бүйір қабырғаларына қатысты K, L, M, N нүктелері арқылы $SK=\frac{1}{k}SA,\ SL=\frac{1}{l}SB,$ $SM=\frac{1}{m}SC,\ SN=\frac{1}{n}SD$ болатындай жазықтық жүргізілген. k,l,m және n сандарының арасындағы тәуелділікті табыңыз.



Шешімі. K, L, M, N төрт нүктенің бір жазықтықта жату шартына сәйкес $\vec{MN}=\alpha\vec{MK}+\beta\vec{ML}$. Осы теңдіктегі әрбір векторды S нүктеден басталатын векторлардың айырымы түрінде өрнектейміз $\vec{MN}=\vec{SN}-\vec{SM}$ $\vec{MK}=\vec{SK}-\vec{SM}$ $\vec{ML}=\vec{SL}-\vec{SM}$;

$\vec{SN}-\vec{SM}=\alpha\left(\vec{SK}-\vec{SM}\right)+\beta\left(\vec{SL}-\vec{SM}\right)$ бұдан $\vec{SM}=\alpha\vec{SK}+\beta\vec{SL}+\gamma\vec{SM}$

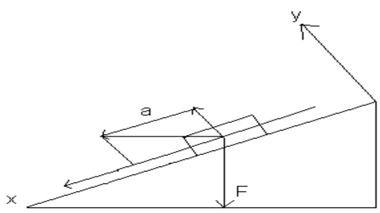
мұнда $\gamma=1-\alpha-\beta$ Есептің шартын ескеріп, бұл теңдікті мына түрде жазамыз:

$\frac{1}{n}\vec{SD}=\frac{\alpha}{k}\vec{SA}+\frac{\beta}{l}\vec{SB}+\frac{\gamma}{m}\vec{SC}$ $ABCD$ параллелограммның диогоналдарының қиылысу нүктесін O нүктесі арқылы белгілейміз, сонда O нүктесі AC және BD диогоналдарының ортасы. $\vec{SA}+\vec{SC}=\vec{SB}+\vec{SD}=2\vec{SO}$ демек $\frac{1}{n}\vec{SD}=\frac{1}{n}\left(\vec{SD}-\vec{SB}+\vec{SC}\right)$. олай болса $\frac{1}{n}\overrightarrow{SD}$ векторы компланар емес $\overrightarrow{SD}$, $\overrightarrow{SB}$ және $\overrightarrow{SC}$. Векторлардың жіктелуі-нен мынадай сандық теңдік аламыз $\frac{\alpha}{k}=\frac{1}{n}$, $\frac{\beta}{l}=-\frac{1}{n}$, $\frac{\gamma}{m}=\frac{1}{n}$; $\alpha+\beta+\gamma=1$ екенін ескерсек $\frac{k}{n}-\frac{l}{n}+\frac{m}{n}=1$ немесе $k+m=l+n$

Физикада вектордың көмегімен әр түрлі бағытталған шамалар: күш, үдеу, жылдамдық, т.б. өрнектеуге болады.

Мысалы: Көлбеулік бұрышы α болатын көлбеу жазықтықпен массасы m білеуше қозғалып келеді дейік. Білеушенің жазықтықпен үйкеліс коэффизиенті v-ге тең. Білеуше үдеуін анықтау керек

Берілгені: m – масса, v (ню) – үйкеліс коэффициенті, табу керек- a



Шешуі: Білеушеге үш күш әсер етеді: 1) ауырлық күші $F_a = mg$; 2) тіректің реакция күші (байланыс күші) – N; 3) үйкеліс күші – $F_{\text{үй}}$.

Бұл суреттердің бағыттары суретте көрсетілген.

Осы күштер бірігіп, білеушеге оның бойымен төмен бағытталған a үдеу береді. x пен y координаталар осьтерін сәйкес түрде көлбеу жазықтыққа параллель және оған перпендикуляр бағыттаймыз.

Ньютонның екінші заңын векторлық әдіспен былай жазамыз: $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{үй}}$. Ал бұл теңдеуді скаляр түрінде жазу үшін, векторлардың x пен y осьтеріндегі проекцияларын табайық. x осіндегі проекциядан бастайық.

1) a үдеу векторының x осіндегі проекциясы оң (a_x) және a векторының модуліне тең (a векторы x осьіне параллель) $a_x=a$. 2) F_a –ауырлық күшін құраушыларға жіктейміз. Тіктөртбұрыш шығады. Олардың қабырғалары F_a ның құраушылары. F_a проекциясы x осіндегі ΔABD-дан $AB = F_a \sin\alpha$; $\frac{AB}{AD}(\text{F}_\text{a}) = \sin\alpha$;

$AB = F_a \sin\alpha = mg\sin\alpha$ оң x осімен бағыттас.

3) Үйкеліс күші векторлық проекциясы теріс және – $F_{\text{үй}}$ -ке тең.

4)Тіректің реакция күшінің (байланыс күшінің) векторының проекциясы нөлге тең. Өйткені ол вектор x осіне перпендикуляр. $N_x = 0$. Ньютонның екінші заңы x

осіндегі векторлардың модульдері арқылы өрнектелген, сондықтан проекциялар үшін теңдеуінің түрі мынадай: $ma = mg\sin\alpha - F_{\text{үй}}$ (2)

Енді y осіндегі проекцияларды табамыз:

1) Үдеу векторының y осіндегі проекциясы нөлге тең.(a векторы y осіне перпендикуляр) $a_x = 0.$

2) ΔACD-дан F_a күшінің проекциясы мынаған тең болатынын көруге болады: $\frac{AC}{AD}=\cos\alpha \quad \Rightarrow AC = AD\cos\alpha;\ AC = F_a\cos\alpha = mg\cos\alpha,$ теріс $AC = -mg\cos\alpha;$

3) Тіректің реакциясы күші векторының проекциясы оң және оның модуліне тең: $N_y = N;$

4) Үйкеліс күшінің векторының проекциясы нөлге тең $F_{\text{үй}} = 0$. Бұл жағдайда Ньютонның екінші заңының теңдеуі мына түрде жазылады: $-mg\cos\alpha = -N$ яғни, $N = mg\cos\alpha$, Үйкеліс күші $F_{\text{үй}} = \nu N$ тең екенін білеміз.$F_{\text{үй}} = \nu mg\cos\alpha$ екінші формулаға қоямыз. $ma = mg\sin\alpha - \nu mg\cos\alpha;\quad a = g\sin\alpha - \nu g\cos\alpha.$ Осы формуладан еркін түсу үдеуінен кем екенін көріп отырмыз. Егер үйкеліс болса ($\nu = 0$), онда көлбеу жазықтық бойымен сырғанап келе жатқан дененің үдеуі модулі жағынан $a = g\sin\alpha,$ яғни мұнда да, ол g-ден кем.

Кез келген есепті шығарғанда оқушы математикалық білім алады, шығару біліктілігі қалыптасады, дағдыға ие болады, яғни математикалық білім деңгейі жоғарылайды .

Есеп шығару оқушылардың сөйлеу мәдениетіне, мінез құлқының қалыптасуына, табандылыққа, шыншылдыққа, бастаған істі аяғына дейін жеткізуге, қиындықты жеңе білу сияқты қасиеттерінің тәрбиеленуіне ықпалын тигізетіні анық.

Әдебиеттер

1. Аргунов Б.И. «Элементарная геометрия» Учебное пособие для пединститутов. М. “Просвещение”, 1966г.

2. Баян Көкенұлы,Тілеуғалы Әміртайұлы, Серік Балпанұлы «Физика нәнінен есептер шығарудың үлгілері». Қарағанды МББҚ БА және ҚДИ ред-баспасы 2008ж.